

Цикл практических занятий по математике
«Решим задачи части «С» ЕГЭ»

Занятие № 1: Решение тригонометрических уравнений. Отбор корней (задания С1)

I. Решение простейших тригонометрических уравнений с дополнительными условиями.

Задание: а) Решить уравнение;
б) Указать корни уравнения, удовлетворяющие условию.

1. а) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $x \in \left[\pi, \frac{5\pi}{2} \right]$.
 Ответ: а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$; б) $\frac{9\pi}{4}$.

2. а) $\sin x = -\frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg} x > 0$.
 Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$; $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$; б) $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

3. а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $x \in \left(-\frac{5\pi}{2}, -\pi \right)$.
 Ответ: а) $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$; б) $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{13\pi}{6}$.

4. а) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $x \in [-\pi; \pi]$.
 Ответ: а) $x = \pm \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$; б) $\pm \frac{\pi}{12}$; $\pm \frac{11\pi}{12}$.

5. а) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0$; б) $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} \right]$.
 Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$; б) $\frac{2\pi}{3}$.

6. а) $\sqrt{3}\operatorname{tg} \left(\pi x - \frac{\pi}{5} \right) = 1$; б) $-2 < x < 1$.
 Ответ: а) $x = \frac{11}{30} + n, n \in Z$; б) $-\frac{49}{30}$; $-\frac{19}{30}$; $\frac{11}{30}$.

Упражнения для повторения:

1. а) $\cos x = -\frac{1}{2}$; б) $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$.
 Ответ: а) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; б) $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$.

2. а) $\sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$; б) $x \in [-2\pi; \pi]$.
 Ответ: а) $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n, n \in Z$; $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k, k \in Z$;
 б) $-\frac{17\pi}{9}$; $-\frac{11\pi}{9}$; $-\frac{5\pi}{9}$; $\frac{7\pi}{9}$; $\frac{5\pi}{3}$; $-\pi$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$.

II. Решение тригонометрических уравнений, основные типы.

1. Квадратные относительно тригонометрической функции.

1. $2\sin^2 \left(\frac{x}{3} \right) - 9\cos \left(\frac{x}{3} \right) + 1 = 0$ Ответ: $x = \pm \pi + 6\pi n, n \in Z$

3

2. $(\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x - 6) \cdot \sqrt{-\cos x} = 0$
 Ответ: $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; $x = \pi - \operatorname{arctg} 6 + 2\pi k, k \in Z$.

2. Однородные.

1. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$
 Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$.

2. $3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 13\sin x \cdot \cos x$
 Ответ: $x = \operatorname{arctg} 4 + \pi k, k \in Z$; $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$.

3. $10\cos^2 x - 5\sin 2x = 4$
 Ответ: $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$; $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in Z$.

3. Разложение на множители.

1. $6\sin x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin \frac{2}{x} = 0$
 Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}, n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

2. а) $2\sin 2x - 4\cos x - \sin x + 1 = 0$ б) $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$.
 Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2\pi k, k \in Z$ б) $\frac{\pi}{2}$.

4. Использование периодичности функций.

$\sin \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi n, n \in Z \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$ $\cos \alpha = \cos \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi n, n \in Z \\ \alpha = -\beta + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$

$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + \pi n, n \in Z \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{cases}$

1. а) $\cos 6x = \cos 3x$; б) $x \in [0; \pi]$

Ответ: а) $x = \frac{2}{3}\pi n, n \in Z$; $x = \frac{2}{9}\pi k, k \in Z$; б) 0; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{9}$; $\frac{4\pi}{9}$; $\frac{8\pi}{9}$.

2. а) $\sin x = \cos 7x$; б) $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$; $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$

б) $-\frac{3\pi}{16}$; $\frac{\pi}{16}$; $\frac{5\pi}{16}$; $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{4}$.

3. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x$ Ответ: $x = -\pi k, k \in Z$.

4. а) $\cos 2x + \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = 0$ б) $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2} \right]$

Ответ: а) $x = \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$; б) 0; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; 2π .

Упражнения для повторения:

1. а) $\sin 2x = \cos x$; б) $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$
 Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$.
2. а) $5 \sin^2 2x + 8 \cos^3 x = 8 \cos x$; б) $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$
 Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = \pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$;
 б) $\frac{3\pi}{2}; 2\pi$.
3. а) $4 \sin^2 x - 12 \sin x + 5 = 0$; б) $\cos x < 0$.
 Ответ: а) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
4. а) $\sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x = 0$ б) $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$
 Ответ: а) $x = \arctg 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{4}; \arctg 3; \arctg 3 - \pi$.
5. а) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$; б) $x \in \left[\frac{5\pi}{4}; 4\pi\right]$.
 Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$;
 б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}; \frac{13\pi}{6}$.

III. Задания В5

1. Найти наименьший положительный корень уравнения; ответ дать в градусах:
 $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 Ответ: 270.
2. Найти наибольший отрицательный корень уравнения; ответ дать в градусах:
 $\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 Ответ: -60.
3. Найти наибольший отрицательный корень уравнения; ответ записать в градусах:
 $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.
 Ответ: -90.
4. Найти наибольший корень уравнения $\cos 2x + 3 \sin x = 2$, принадлежащий отрезку $[-3\pi; -\pi]$; ответ дать в градусах.
 Ответ: -210.
5. Найти число корней уравнения $\sin^2 2x = \frac{3}{4}$ при $x \in (0^\circ; 45^\circ)$.
 Ответ: 1.

IV. Практикум по решению заданий С1.

1. а) $7 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$ б) $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$
 Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \arctg \frac{3}{7} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}; \arctg \frac{3}{7} + 2\pi$.

2. а) $\cos 2x + 2 \cos^2 x - \sin 2x = 0$ б) $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$
 Ответ: а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = -\arctg 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}; -\arctg 3 + 2\pi$.
3. а) $\sin x + \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right) = 0$ б) $x \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$
 Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}$.
4. а) $\cos x = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2 - 1$ б) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$
 Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$.
5. а) $\sin 2x = 2 \sin x - \cos x + 1$ б) $x \in \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$
 Ответ: а) $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi; -\frac{5\pi}{6}$.
6. а) $6 \cos^2 x - 7 \cos x - 5 = 0$ б) $x \in [-\pi; 2\pi]$
 Ответ: а) $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}$.
7. а) $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ б) $x \in \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$
 Ответ: а) $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$.
8. а) $6 \sin^2 x + \cos x - 5 = 0$ б) $x \in [2\pi; 3\pi]$
 Ответ: а) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{3}\right) + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}; 3\pi - \arccos \frac{1}{3}$.
9. а) $\sqrt{3} \sin x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \sin x = \sqrt{3}$ б) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]$
 Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$.
10. а) $4 \cos x \sin x - 3 \sin^2 x = 1$ б) $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$
 Ответ: а) $x = \arctg \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi + \arctg \frac{1}{2}; \arctg \frac{1}{2}; \pi + \arctg \frac{1}{2}$.
11. $(\cos 3x - 1)\sqrt{6 + 5x - x^2} = 0$
 Ответ: $-1; 6; 0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$.
12. $\frac{x-3}{1-x} \cdot (\cos 4x + \sin 3x - \cos 2x) = 0$
 Ответ: $\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}; 3$.